Seri bahan kuliah Algeo #18

Nilai Eigen dan Vektor Eigen

(Bagian 1)

Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika

STEI-ITB

Sumber:

Howard Anton & Chris Rores, *Elementary Linear Algebra, 10th Edition*

Definisi

- Jika A adalah matriks n x n maka vektor tidak-nol $\mathbf{x}$ di R^n disebut **vektor eigen** dari A jika $A\mathbf{x}$ sama dengan perkalian suatu skalar λ dengan $\mathbf{x}$, yaitu

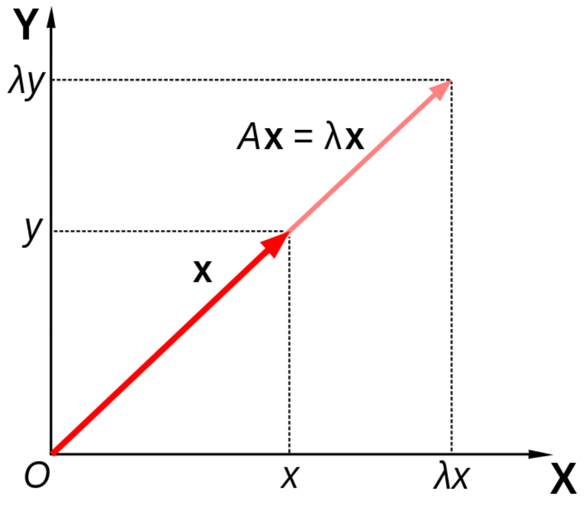
$$\boxed{A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}}$$

  Skalar λ disebut **nilai eigen** dari A, dan $\mathbf{x}$ dinamakan vektor eigen yang berkoresponden dengan λ.

- Kata "eigen" berasal dari Bahasa Jerman yang artinya "asli" atau "karakteristik".

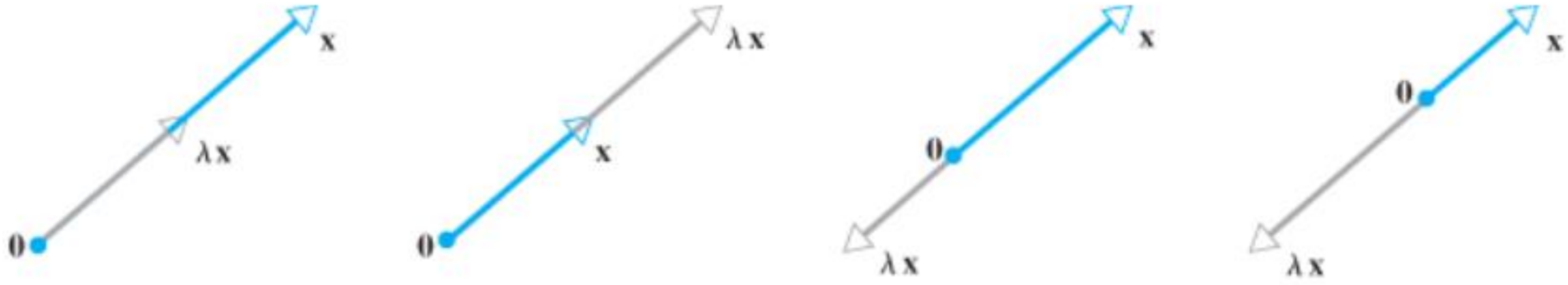
- Dengan kata lain, nilai eigen menyatakan nilai karakteristik dari sebuah matriks yang berukuran n x n.

- Vektor eigen **x** menyatakan matriks kolom yang apabila dikalikan dengan sebuah matriks n x n menghasilkan vektor lain yang merupakan kelipatan vektor itu sendiri.



Sumber gambar: Wikipedia

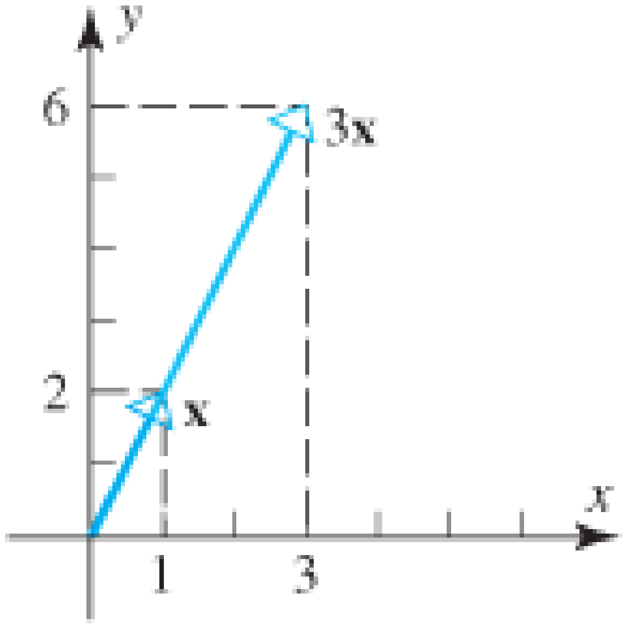
- Dengan kata lain, operasi $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ menyebabkan vektor **x** menyusut atau memanjang dengan faktor λ dengan arah yang sama jika λ positif dan arah berkebalikan jika λ negatif.



(a) $0 \le \lambda \le 1$ (b) $\lambda \ge 1$ (c) $-1 \le \lambda \le 0$ (d) $\lambda \le -1$

Contoh 1: Misalkan $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$. Vektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ merupakan vektor eigen dari A dengan nilai eigen yang berkoresponden $\lambda = 3$, karena

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3\mathbf{x}$$



Latihan 1

Perlihatkan bahwa **x** = $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ merupakan vektor eigen dari matriks *A* = $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ dengan nilai eigen yang berkoresponden λ = –2, lalu gambarkan vektor **x** dan hasil perkaliannya dengan *A*.

Cara menghitung nilai eigen dan vektor eigen

- Diberikan sebuah matriks A berukuran n x n. Vektor eigen dan nilai eigen dari matriks A dihitung sebagai berikut:

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

$$IA\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x} \qquad \text{(kalikan kedua ruas dengan } I \text{ = matriks identitas)}$$

$$A\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x}$$

$$(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$$

$\mathbf{x} = 0$ adalah solusi trivial dari $(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$

Agar $(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$ memiliki solusi tidak-nol, maka haruslah

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

- Persamaan $\det(\lambda I - A) = 0$ disebut **persamaan karakteristik** dari matriks A, dan akar-akar persamaan tersebut, yaitu λ, dinamakan **akar-akar karateristik** atau **nilai-nilai eigen**.

Contoh 2: Tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$

Jawaban:

(a) Menentukan nilai-nilai eigen

$\boxed{\det(\lambda I - A) = 0}$

$$\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0 \rightarrow \text{persamaan karakteristik}$$

$$\rightarrow \lambda_1 = 3 \text{ dan } \lambda_2 = -1$$

Jadi, nilai-nilai eigen dari matriks A adalah $\lambda = 3$ dan $\lambda = -1$.

(b) Menentukan vektor eigen

$(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Untuk $\lambda = 3 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow -8x_1 + 4x_2 = 0 \rightarrow 8x_1 = 4x_2 \rightarrow x_1 = \frac{1}{2} x_2$

$\rightarrow$ Solusi: $x_1 = \frac{1}{2} t$, $x_2 = t$, $t \in \mathbf{R}$

Vektor eigen: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ $\rightarrow$membentuk **ruang eigen** (*eigenspace*)

Jadi, $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah basis untuk ruang eigen dengan $\lambda = 3$

Ruang eigen ditulis sebagai E(3) = { $\mathbf{x} = t \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \in \mathbf{R}$ }

Untuk $\lambda = -1 \rightarrow$ $\begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Selesaikan dengan eliminasi Gauss:

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{R1/(–4)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{R2 + 8R1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ Solusi: $x_1 = 0$, $x_2 = t$, $t \in \mathbf{R}$

Vektor-vektor eigen: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\rightarrow$membentuk **ruang eigen** (*eigenspace*)

Jadi, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah basis untuk ruang eigen dengan $\lambda = -1$

Ruang eigen ditulis sebagai E(–1) = { $\mathbf{x} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \in \mathbf{R}$ }

Latihan 2

Tentukan nilai-nilai eigen, vektor eigen, ruang eigen, dan basis ruang eigen dari matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

<u>Jawaban</u>:

- Nilai-nilai eigen adalah $\lambda_1 = -2$ dan $\lambda_2 = 4$ (cara penyelesaiannya ditinggalkan sebagai latihan)
- Untuk $\lambda = -2$, vektor-vektor eigen adalah $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

  Ruang eigen adalah $E(-2) = \{ \mathbf{x} = t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, t \in \mathbf{R} \}$, basis ruang eigen = $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

- Untuk $\lambda = 4$, vektor-vektor eigen adalah $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

  Ruang eigen adalah $E(4) = \{ \mathbf{x} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbf{R} \}$, basis ruang eigen = $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Contoh 3: Diketahui A = $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. Carilah nilai-nilai eigen dari matriks A dan basis untuk ruang eigen.

Jawaban:

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = 0$$

Gunakan baris ke-3 (berwarna merah)sebagai acuan:

$$0 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ \lambda - 3 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (\lambda - 5) \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 2 \\ 2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = 0$$

$(\lambda - 5)((\lambda - 3)(\lambda - 3) - 4) = 0$

$(\lambda - 5) (\lambda^2 - 6\lambda + 5) = 0$

$(\lambda - 5) (\lambda - 5)(\lambda - 1) = 0$

$\rightarrow \quad \lambda_1 = 5$ dan $\lambda_2 = 1$

Untuk $\lambda = 5 \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Selesaikan dengan eliminasi Gauss:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{R1/2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{R2} - 2\text{R1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matriks augmented

diperoleh persamaan: $x_1 + x_2 = 0 \rightarrow x_1 = -x_2$

misal $x_2 = s$, $x_3 = t$, maka $x_1 = -s$

Ruang eigen: $E(5) = \{\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, s \text{ dan } t \in \mathbf{R}\}$

Basis ruang eigen: $\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$ karena $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ bebas liner

Untuk $\lambda = 1 \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Selesaikan dengan eliminasi Gauss:

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \text{R1/(-2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \text{R2 −2R1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \text{R3/(-4)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matriks augmented

diperoleh persamaan: $x_3 = 0$, $x_1 - x_2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2$

misal $x_2 = t$, maka $x_1 = t$

Ruang eigen: $E(1) = \{\mathbf{x} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbf{R}\}$

Basis ruang eigen: $\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\}$

Perhatian: Tidak semua matriks memiliki nilai-nilai eigen. Perhatikan contoh 4 berikut:

Contoh 4: Tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

<u>Jawaban</u>:

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ -5 & \lambda - 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ -5 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\rightarrow (\lambda + 2)(\lambda - 2) - (1)(-5) = 0$$

$$\rightarrow \lambda^2 - 4 + 5 = 0$$

$$\rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \quad \text{(akar-akarnya imajiner)}$$

Jadi, matriks A tidak memiliki nilai-nilai eigen

Aplikasi nilai eigen dan vektor eigen

- Grafika computer
- Fisika: getaran mekanis, aliran panas, mekanika kuantum
- Biologi: dinamika populasi
- Sistem pendukung keputusan
- Ekonomi
- dll

Latihan

1. Diberikan matriks A sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a). Tentukan semua nilai eigen dari matriks A
b). Tentukan semua vektor eigen dari A dan basis dari ruang eigen

2. Diketahui matriks :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Hitunglah nilai eigen dari matriks A.
b) Tentukan vektor eigennya untuk setiap nilai eigen a).
c) Tentukan basis dari ruang eigennya.